量子カオスにおける位相の特異点

京都大学理学部　戸田幹人

量子系における散逸の原因は、位相の情報の喪失にある。従来の議論では、外部にある無限自由度系（熱浴）からの雑音によって位相がランダムになると考える。これに対してここでは、相互作用を含めた全体の系のダイナミックスの内在的な性質として、位相の乱雑化の力学的なメカニズムを理解したい。

位相の乱雑化をどのように特徴付けるか。周知のように位相の値そのものは物理的意味を持たないので、位相の値の確率分布を考えても無意味である。従って位相差を考えなければならないが、２点を結ぶ経路の連続的な変形を考えた時の位相差のトポロジカルな性質のみが本質的な情報である。以上の考えからここでは、位相の乱雑化を考える時に際して、位相のトポロジカルな性質に着目することにする。この時、位相のトポロジカルな性質が表示によって不変であることを期待しているのであるが、このことはまだ確かめていない。

位相のトポロジカルな性質が表示によって不変であるかまだわからないので、ここでは後で述べる理由によって便利である表示として、伏見表示を用いる。これは、位置と運動量の最小不確定波束との内積であり、量子古典対応を最も良く与える表示として知られている [1] 。しかしここで重要なのはこの点では（必ずしも）なく、むしろこの表示の持つ解析性である [2] 。伏見表示は、位相空間を複素平面と考えた時、その上の整関数によって与えられる。関数論の偏角の定理により、整関数のゼロ点は位相のトポロジカルな特異点である。従って、伏見表示のゼロ点の性質に着目することによって、位相のトポロジカルな性質を調べることができる（多変数の場合には、ゼロ集合の補集合のホモトピー群を考えれば良い。）。このように、位相のトポロジカルな性質を特徴付ける上で便利であることが、ここで伏見表示を使う最も大きな理由である。

以上の議論に基付いて、伏見表示のゼロ点の分布が時間発展においてどう変化するか、特に対応する古典系がカオスである時どのような特徴的な性質が見られるかを調べてきた [3] 。現在さらに、連続的な時間発展の下でのゼロ点の軌跡を調べている。この時、一般にゼロ点の軌跡は交差しないことが、次のような議論でわかる。２つのゼロ点の位置を一致させるためには、２つの方程式が必要である。即ち、ゼロ点の実部及び虚部に関する式である。時間は１パラメーターなので、この２つの式を同時に満たすことはできない。従って、２つのゼロ点の軌跡は一般には交差せずに絡まりあう。

このゼロ点の軌跡の絡まり合いが、どのような物理的意味を持っているかを考える。そのために、次のような直観的な議論をしてみよう。時刻 $t=0$ に状態 ψ_0 にあった系が、時間発展によって時刻 $t=T$ に状態 ψ_1 になったとする。この時、この時間発展を逆転してもとの状態 ψ_0 にすることを考える。そのためには、時間発展によって発生したゼロ集合の絡まりをほどくことが必要であり、位相に関する限りこれで十分であろう。従って不可逆性の起源を、もとの状態を復元するためのアルゴリズム的な複雑さと考える時、このゼロ集合の絡まりをほどくのに必要な手順の数は、まさにその複雑さを与えていると言えるのではないか。（ただし、ここで

言うところの「からまる」あるいは「ほどく」には、無限遠点を介した操作が含まれている。なぜなら整関数では、有限の領域内でのゼロ点の生成消滅は無く、無限遠においてのみ生成消滅し得るからである。)

実は1変数の時には、この議論はこのままでは間違っている。なぜなら、もとの状態を復元するには、個々のゼロ点の位置をもとに戻す必要は無く、ゼロ点の集合が全体として一致する状態に戻せば良いからである。従って、時間発展によって生じた軌跡の絡み目をほどく必要はない。これに対して多変数の時には、一般にゼロ集合は面を成しているので（n 自由度の時、位相空間は $2n$ 次元であり、ゼロ集合は $2n-2$ 次元の面である。)、このように連続的につながったものをもとに戻すためには、それをほどく必要があろう。

以下では、時間に依存する1自由度系における計算例を示す。多自由度系を考えるための予備的計算であるとともに、ゼロ点の軌跡に関して量子古典対応から何がどこまでわかるかを調べるのがこの計算の目的である。図1に伏見表示の計算例を示す。伏見表示の絶対値の等高線、等位相線およびゼロ点が図示してある。モデルは double well ポテンシャルで、井戸の深さを周期的に変えることによりカオスが発生する。図2と図3はゼロ点の軌跡の計算例である。図2はポテンシャルが時間変化しない場合で可積分、図3ではポテンシャルが周期変化しておりカオスの場合である。

可積分の場合とカオスの場合を比べた時、共通するのはゼロ点が集団的に運動していることである。違いは、可積分の時にはゼロ点が1次元的にならんでコヒーレントに運動しているのに対して、カオスの時には束のように集団を成していることである。

可積分の場合におけるコヒーレントな運動は半古典論で説明がつくであろう。良く見ると、コヒーレントな運動がいくつかのゼロ点の間で受け継がれていく場合もある。これは、エネルギーレベルの反発からの類推で、ゼロ点の運動における「トンネル」と言うこともできる。

カオスの場合、集団運動から単独で飛び出したり飛び込んだりするゼロ点がある。このようなゼロ点の単独行動が、量子古典対応の破れを典型的に示しているのではないか。そのように考えるのは、次のように推測しているからである。伏見表示は量子古典対応を見るのに適した表示であるから、そのゼロ点というのは言うなれば最も量子的な対象である。従って、ゼロ点が個々に単独の運動をするのは、力学が古典対応を持つ領域から量子的な領域に入ったことを示しているのではないか。この議論もまだ推測にとどまる。ゼロ点の運動方程式を具体的に書き下ろすことができれば、これについてより具体的なことが言えるかも知れない[4]。

以上に行なってきた議論は作業仮説と言うべきものであり、今後の研究の進展によって大いに修正する必要があろう。関連する数学の分野も広く、筆者一人ではとても調べきれない。多くの方との討論をお待ちする次第である。

参考文献

[1] K.Husimi, Proc.Phys.Math.Soc.,Vol.22(1940)p264.
K.Takahashi, J.Phys.Soc.Japan,Vol.55(1986)p762.

[2] V.Bergmann, P.Butera, L.Girardello and J.R.Klauder, Rep.Math.Phys.Vol.2(1971)p221.
A.M.Perelomov, Theor.Math.Phys. Vol.6(1971)p156.

[3] M.Toda, Physica D59(1992)p121

[4] スピンコヒーレント表示に対しては、ゼロ点の運動方程式が具体的に求められている。
P.Leboeuf, J.Phys.A24(1991)p4575.

図1

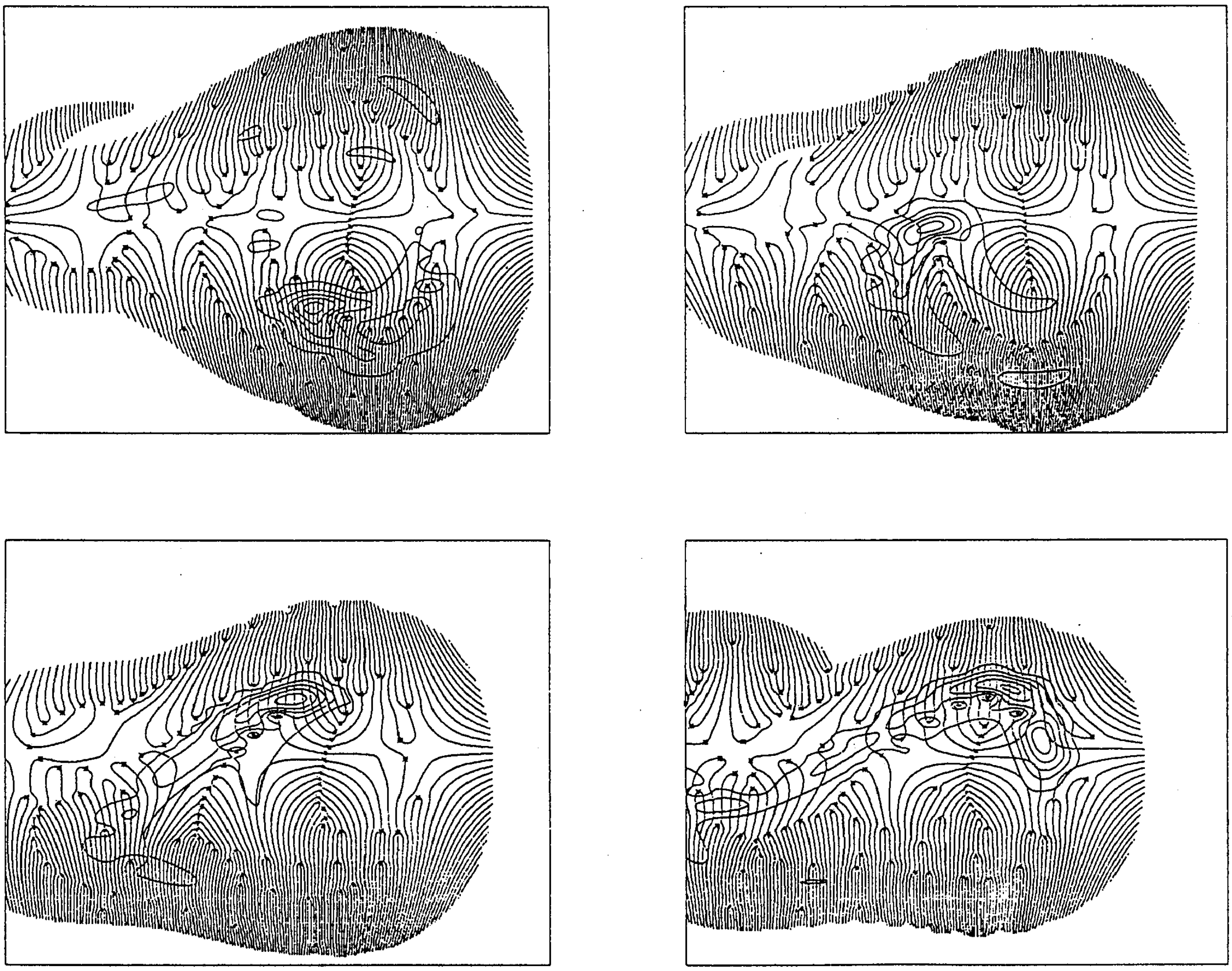

図2

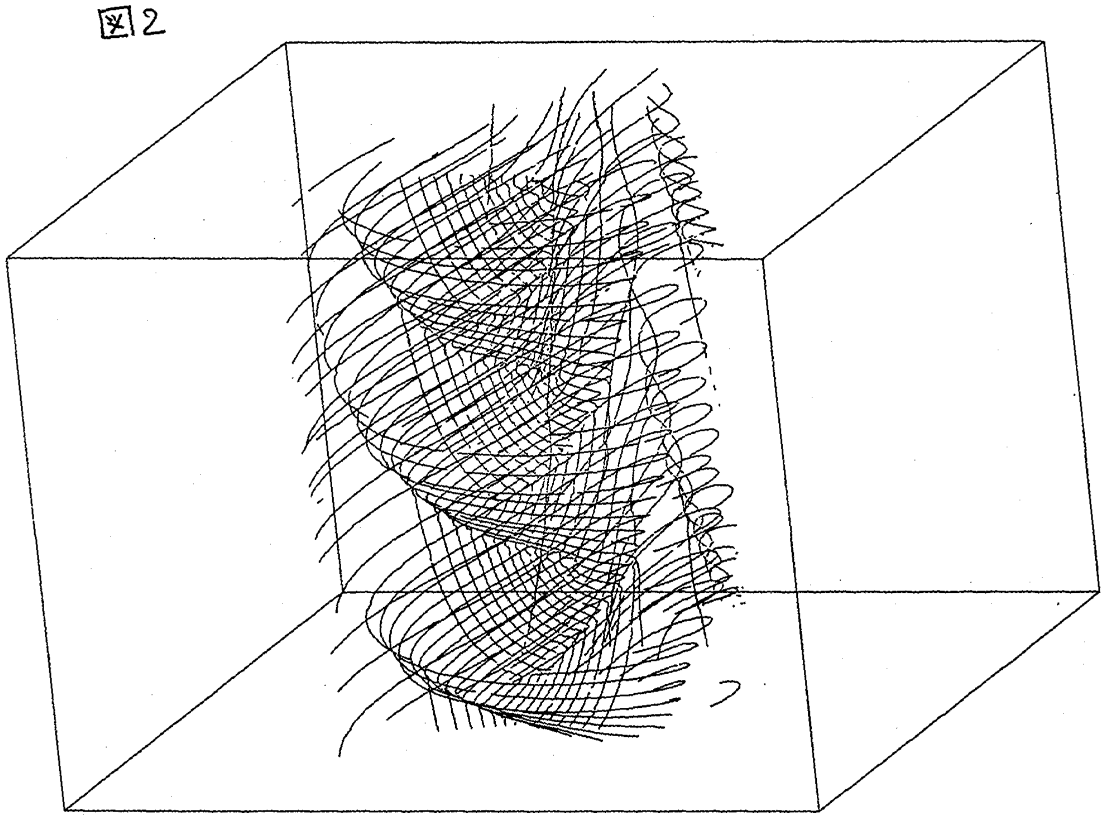

図3